На правах рукописи

Шалагинов Сергей Дмитриевич

Задача Коши для эллиптических уравнений, порождаемых оператором Лапласа в комплексном пространстве

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций
Тюменского государственного университета

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор
$\boxed{\text{Янушаускас А. И.}}$

доктор физико-математических наук, профессор Кругликов В. И.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Сакс Р.С.,
доктор физико-математических наук, профессор Максимов В.И.

Ведущая организация: Институт математики СО РАН

Защита диссертации состоится _____________ 2003 г. в ____ч. на заседании диссертационного Совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М.Горького по адресу:
620083, г. Екатеринбург, проспект Ленина 51, комн. 248

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского госуниверситета им. А.М.Горького

Автореферат разослан ____________ 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета К 212.286.01
доктор физ.-мат. наук, доцент Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Поиск решений дифференциальных уравнений с частными производными второго и более высоких порядков всегда находился в сфере повышенных интересов многих выдающися математиков на протяжении уже не одного столетия. Так, классические уравнения математической физики рассматривались ещё в восемнадцатом веке.

Как практические, так и теоретические потребности приводили исследователей к необходимости нахождения таких решений, которые удовлетворяли бы ещё тем или иным дополнительным условиям. Эти условия известны теперь как начальные и краевые условия, а задачи, связанные с ними – как задача Коши, задача Дирихле и др.

В работах Адамара начала двадцатого века было введено понятие корректности (и некорректности) постановки задачи Коши (распространённое впоследствии и на другие краевые задачи) для уравнений с частными производными. Как оказалось, для каждого типа уравнений существуют свои корректно поставленные задачи.

Так для классического уравнения Лапласа в вещественном пространстве R^n постановка задачи Дирихле является корректной.

Этого нельзя сказать о задаче Коши. В частности, как показывает известный пример Адамара, решение задачи Коши для уравнения Лапласа единственно, но неустойчиво.

Для того, чтобы постановка задачи Коши была корректной, необходимо сузить класс рассматриваемых решений уравнения Лапласа. Таким сужением может служить класс равномерно ограниченных решений. При таком предположении оценки, характеризующие устойчивость решения задачи Коши, впервые были получены М.М.Лаврентьевым для произвольной пространственной области с достаточно гладкой границей. Аналогичные оценки были получены С.Н.Мергеляном для функций внутри сферы. На случай произвольного эллиптического уравнения решение вопроса об устойчивости пространственной задачи Коши было распространено Е.М.Ландисом.

В 30-е гг. двадцатого века в работах ряда математиков появляются простейшие дифференциальные уравнения с комплексными переменными. Это связано, прежде всего, с началом широкого применения в изучении вещественных дифференциальных уравнений методов теории функций комплексного переменного.

Особо следует отметить труды И.Н.Векуа, в которых применение таких методов привело к созданию аналитической теории эллиптических уравнений и систем с двумя независимыми переменными.

Весьма плодотворным применение аппарата теории функций одного и многих комплексных переменных оказалось и в более сложном случае многомерных уравнений. Глубокие результаты, полученные здесь, связаны, прежде всего, с именами А.В.Бицадзе, И.Н.Векуа, З.И.Халилова, а также С.Бергмана, Л.Берса, П.Гарабедяна, Г.Леви и др.

В связи с этим возникает самостоятельный интерес к собственно комплексным дифференциальным уравнениям.

Первоначальной работой здесь является, по-видимому, статья А.И.Янушаускаса [1], в которой им рассматривалось уравнение Лапласа с тремя комплексными переменными. Для решения этого уравнения получено интегральное представление через голоморфные функции двух комплексных переменных. При этом оказалось, что, в отличие от вещественного случая, задача Коши в случае комплексного уравнения Лапласа является корректной.

Вполне естественным развитием теории комплексных дифференциальных уравнений представляется рассмотрение задачи Коши для более общих эллиптических уравнений (как в отношении их порядка, так и в отношении количества переменных). Основы аналитической теории таких уравнений по состоянию на 1979 год были систематизированы А.И.Янушаускасом в его монографии [2].

В настоящее время эта теория, продолжая интенсивно развиваться, всё ещё остаётся весьма далёкой от завершающих результатов, что и диктует необходимость дальнейших исследований в этом направлении.

Цель работы. Главная цель диссертации заключается в получении интегральных представлений решений задачи Коши для ряда важнейших классов комплексных дифференциальных уравнений, порождаемых оператором Лапласа.

Методика исследования. Широко используются методы теории функций многих комплексных переменных применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными.

Научная новизна. В работе получены интегральные представления решений задачи Коши для следующих комплексных дифференциальных уравнений:

- уравнение Лапласа,
- уравнение Пуассона,
- уравнение, порождаемое линейной комбинацией степеней оператора Лапласа,
- полигармоническое уравнение,
- полиметагармоническое уравнение.

С помощью интегральных представлений изучены аналитические свойства решений (область голоморфности, возможность аналитического продолжения, распределение особых точек и др.).

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы в теоретических и прикладных задачах, где находят приложения аналитические представления решений многомерных дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Отдельные результаты диссертации докладывались на Всесоюзном семинаре по аналитической теории уравнений с частными производными (Уфа, 1984 г.), на областной межвузовской конференции молодых учёных и специалистов (Тюмень, 1985 г.), на семинарах по теории функций в Донецком государственном университете (1990, 1995 гг.), на семинарах в Институте математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2001г.), Институте математики СО РАН (Новосибирск, 2002 г.) и Башкирском государственном университете (Уфа, 2002 г.). Подробно и полно результаты диссертации излагались на семинаре по аналитической теории уравнений с частными производными в Институте математики СО РАН (рук. А.И.Янушаускас), а также на семинаре по теории функций в Тюменском государственном университете (рук. В.И.Кругликов).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, списком которых завершается автореферат.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Каждая глава имеет свою нумерацию параграфов, некоторые из которых разбиты на пункты. Нумерация утверждений и формул проводится посредством двух чисел, первое из которых означает номер главы, а второе – номер одноименного утверждения или формулы. Так, например, название «лемма 3.1» означает первую (по порядку изложения) лемму в третьей главе, а номер формулы (2.14) означает четырнадцатую из формул, выделенных в тексте второй главы. В список литературы включены лишь те публикации, на которые имеется ссылка в тексте. Общий объём диссертации - 65 страниц, библиография - 48 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Прежде, чем перейти к анализу результатов диссертации, уточним терминологию.

Следуя А.И.Янушаускасу [2], будем говорить, что комплексное дифференциальное уравнение является эллиптическим (гиперболическим или параболическим), если оно является таковым при вещественных значениях переменных.

В первой главе диссертации рассматривается задача Коши для уравнений Лапласа и Пуассона. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [9], [12], [14].

Говоря здесь и далее о задаче Коши, следует отметить, что существование и единственность её решения принципиально гарантируются универсальной теоремой Коши – Ковалевской, имеющей место и для комплексных переменных.

При этом, если в вещественном пространстве существование решения гарантируется только в малом, то уже в комплексном пространстве оно имеет место в целом.

Разумеется, теорема Коши – Ковалевской не дает общего аналитического выражения решения задачи Коши для того или иного дифференциального уравнения, и нашей основной задачей в первой и последующих главах является получение таких аналитических формул.

Первый параграф главы 1 посвящён трёхмерному (относительно пространства C^3 комплексных переменных x, y, z) уравнению Лапласа, для которого изучается задача Коши в следующей постановке: найти голоморфное решение уравнения

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{z=0} = g(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = f(x, y), \tag{1.2}$$

где f и g - функции, голоморфные в некоторой области голоморфности $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}^2$ и непрерывные в замкнутой области $\overline{\mathrm{D}}$.

Заметим здесь, что А.И.Янушаускасом в [3] при помощи исследования задачи Коши для уравнения Лапласа в другой форме

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0,$$

получаемой преобразованием уравнения (1.1) посредством замены переменных

$$\xi=x+iy\,,\quad \eta=x-iy\,,\quad \zeta=z\,,$$

выведено интегральное представление гармонических функций трёх новых независимых комплексных переменных $\xi,\eta,\zeta,$ а именно

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\left\{\frac{g(t,\tau)}{(t-\xi)(\tau-\eta)}F\left(1,1;\frac{1}{2};-\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\zeta f(t,\tau)}{(t-\xi)(\tau-\eta)}F\left(1,1;\frac{3}{2};-\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right)\right\}dt\,d\tau,$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;s)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [5].

Этот результат А.И.Янушаускаса относится фактически к другому типу уравнения, нежели исходное уравнение (1.1) как по классификации типа (оно гиперболическое), так и по виду интегрального представления решения (оно приведено в новых переменных ξ,η,ζ и не совсем ясно, как из него получить представление в старых переменных x,y,z).

В настоящей же работе нами дополнительная замена переменных не проводилась и для решения задачи Коши (1.1), (1.2) получено следующее интегральное представление

$$u(x,y,z)=\frac{i}{8\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\left\{\frac{\left[(t-x)^2+(\tau-y)^2+z^2\right]f(t,\tau)-zg(t,\tau)}{\left[(t-x)^2+(\tau-y)^2+z^2\right]^{3/2}}\times\right.$$

$$\times\ln\frac{(t-x)(\tau-y)+iz\sqrt{(t-x)^2+(\tau-y)^2+z^2}}{(t-x)(\tau-y)-iz\sqrt{(t-x)^2+(\tau-y)^2+z^2}}+$$

$$\left.+\frac{2i(t-x)(\tau-y)\left[(t-x)^2+(\tau-y)^2+2z^2\right]g(t,\tau)}{\left[(t-x)^2+(\tau-y)^2+z^2\right]\left[(t-x)^2+z^2\right]\left[(\tau-y)^2+z^2\right]}\right\}dt\,d\tau\,,\qquad(1.15)$$

где f и g - функции, голоморфные в бицилиндре $D:\{|x|<r_1, |y|<r_2\}$ и непрерывные в замыкании $\overline{D}$ этой области, а интегрирование ведётся по остову границы $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ бицилиндра D.

При помощи полученного представления исследуется вопрос о голоморфности решения $u(x, y, z)$ задачи Коши (1.1), (1.2). Для этого сначала описываются множества особых точек подынтегральной функции. Установлено, что особенности ядра интегрального представления (1.15) располагаются на поверхностях P_1 и P_2, задаваемых системами уравнений

$$\begin{cases} |x|^2 + |z|^2 - 2\operatorname{Im}(x\bar{z}) = r_1^2 \\ |y|^2 + |z|^2 - 2\operatorname{Im}(y\bar{z}) = r_2^2 \end{cases} \tag{1.21}$$

и

$$\begin{cases} |x|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Im}(x\bar{z}) = r_1^2 \\ |y|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Im}(y\bar{z}) = r_2^2 \end{cases} \tag{1.22}$$

соответственно, а решение $u(x, y, z)$ задачи Коши (1.1), (1.2) является голоморфной функцией трёх комплексных переменных x, y, z в области $H(D)$, содержащей область D и ограниченной поверхностями P_1 и P_2.

Затем исследуется пересечение области $H(D)$ с вещественным пространством R^3 (характеризуемым условиями $\operatorname{Im} x = 0$, $\operatorname{Im} y = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$).

В заключение первого параграфа полученные результаты отражены в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Каковы бы ни были функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, голоморфные в бицилиндрической области $D \subset C^2$ и непрерывные в замыкании $\overline{D}$ этой области, в пространстве C^3 найдётся содержащая D область голоморфности $H(D)$ такая, что решение $u(x, y, z)$ задачи

Коши (1.1), (1.2) голоморфно в $H(D)$.

Если, кроме того, начальные данные f и g аналитически продолжимы из D, то решение задачи Коши u аналитически продолжимо из области $H(D)$.

При этом, для каждой точки X границы области $H(D)$ существует гармоническая функция, голоморфная в $H(D)$, удовлетворяющая начальным данным, голоморфным в D, и имеющая особенность в точке X .

Во втором параграфе главы 1 для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{1.25}$$

в пространстве C^{n+1} комплексных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ рассматривается следующая задача Коши: найти голоморфное решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ уравнения (1.25), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{z=0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.26}$$

где f и g - функции, голоморфные в полицилиндрической области $D \subset C^n$ и непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$.

Используя результаты, полученные А.И.Янушаускасом в [4] для более общего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

где A_{jk} – аналитические функции, принимающие вещественные значения при вещественных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а уравнение эллиптично при вещественных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, нами получено следующее интегральное представление решения $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ задачи Коши (1.25), (1.26)

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \left\{ \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{(t_1 - x_1)\ldots(t_n - x_n)} \times \right.$$

$$\times F_B^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, \ldots, 1; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{(t_1 - x_1)^2}, \ldots, -\frac{z^2}{(t_n - x_n)^2} \right) +$$

$$+ \frac{zg(t_1, \ldots, t_n)}{(t_1 - x_1)\ldots(t_n - x_n)} \times$$

$$\left. \times F_B^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, \ldots, 1; \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{(t_1 - x_1)^2}, \ldots, -\frac{z^2}{(t_n - x_n)^2} \right) \right\} dt_1 \ldots dt_n, \quad (1.30)$$

где $F_B^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n; c; z_1, \ldots, z_n)$ – гипергеометрическая функция Лауричелла [6], а интегрирование ведётся по остову Γ границы полицилиндра D, что и составляет основное содержание приводимой нами теоремы 1.3.

Дополнительно комментируя этот результат, прежде всего, отметим, что он содержит в себе цитированную выше формулу (1.15) при n=2. В то же время, мы не можем далее провести анализ области голоморфности решения (1.30), подобно тому, как это сделано для трёхмерного решения (1.15), что и послужило нам основанием выделить этот (трёхмерный) случай отдельно.

Второе замечание касается сравнения представления (1.30) с представлением, полученным А.И.Янушаускасом в [4]. Его представление, относясь к более общему уравнению, носит и само весьма общий характер. В частности, при помощи такого представления уже нельзя сделать конкретные заключения об области голоморфности решения, подобные, как в первом параграфе. Для их реализации потребуются весьма трудоёмкие технические преобразования представления А.И.Янушаускаса к виду, предложенному нами в теореме 1.3.

Третий параграф главы 1 посвящён уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=h(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \qquad (1.31)$$

в пространстве C^{n+1} комплексных переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n,z$. Для него рассматривается следующая задача Коши: найти голоморфное решение $u(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ уравнения (1.31), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \qquad (1.32)$$

Применяя классическую методику поиска решения уравнения в виде ряда, нами доказана

ТЕОРЕМА 1.4. Если функция $h(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ голоморфна в области $\mathrm{H(D)}$ из теоремы 1.2, то для решения $u(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ задачи Коши (1.31), (1.32) справедливо следующее представление

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\Big\{h(t_1,\ldots,t_n,0)G(t_1-x_1,\ldots,t_n-x_n,z)+$$

$$+\int_0^z\frac{\partial h}{\partial z}(t_1,\ldots,t_n,z-\tau)G(t_1-x_1,\ldots,t_n-x_n,\tau)d\tau\Big\}dt_1\ldots dt_n,$$

где $$G=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\tau^{2m+2}}{(2m+2)!}\Delta^m\left(\frac{1}{(t_1-x_1)\ldots(t_n-x_n)}\right). \qquad (1.41)$$

Эта теорема – основная в третьем параграфе.

Если теперь с данным представлением проделать дополнительные преобразования (подобные преобразованиям из второго параграфа), то можно получить ещё одно представление решения в виде

$$u(x_1,\ldots,x_n,z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\int_0^z\frac{\tau h(t_1,\ldots,t_n,z-\tau)}{(t_1-x_1)\ldots(t_n-x_n)}\times$$

$$\times F_B^{(n)}\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},1,\ldots,1;\frac{3}{2};-\frac{\tau^2}{(t_1-x_1)},\ldots,-\frac{\tau^2}{(t_n-x_n)}\right)d\tau dt_1\ldots dt_n, \quad (1.48)$$

являющимся фактически представлением Дюамеля, выражающим решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (уравнения Пуассона в данном случае) через решение соответствующего однородного уравнения (уравнения Лапласа).

Этот факт можно трактовать как обоснование возможности использовать классический принцип Дюамеля в случае комплексных уравнений.

Во второй главе, опираясь на содержание работы [11], проводится исследование задачи Коши для дифференциального уравнения вида

$$\Delta^m u + a_1\Delta^{m-1}u + \ldots + a_{m-1}\Delta u + a_m u = 0, \quad (2.1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – произвольные комплексные числа, Δ - оператор Лапласа

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \quad ,$$

$$\Delta^m \equiv \Delta\left(\Delta^{m-1}\right), \quad m \in \mathrm{N}, \quad m \ge 2$$

в пространстве $\mathrm{C}^{\mathrm{n}+1}$ комплексных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Всюду в дальнейшем точку $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ пространства $\mathrm{C}^{\mathrm{n}+1}$ обозначаем (X, z), где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $z = x_{n+1}$. Для этого уравнения И.Н.Векуа [7] получено общее представление совокупности решений.

Нами при помощи этого общего представления исследуется задача Коши: найти голоморфное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial z^j}\right|_{z=0} = f_j(X), \quad j = 0,1,\ldots,2m-1. \quad (2.2)$$

В случае, когда все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ характеристического уравнения

$$\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0 \tag{2.3}$$

являются простыми, решение задачи Коши для исходного уравнения (2.1) путём алгебраических преобразований нами сводится к решению m задач Коши для уравнений

$$\Delta u - \lambda_k u = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Далее, используя интегральные представления решений этих задач [4], мы выводим интегральное представление решения задачи Коши (2.1), (2.2), описанное в конце главы в форме теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ уравнения (2.3) простые, то решение $u(X, z)$ задачи Коши (2.1), (2.2) можно представить в виде

$$u(X,z) = \sum_{k=1}^{m} p_k(X,z) + \sum_{k=1}^{m} q_k(X,z) -$$
$$-\frac{z}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{-\lambda_k}\, J_1\left(z\sqrt{-\lambda_k t}\right)\left[p_k\left(X, z\sqrt{1-t}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1-t}\, q_k\left(X, z\sqrt{1-t}\right)\right] dt,$$

где каждая из функций $p_k(X,z)$ и $q_k(X,z)$, $k = 1,2,\ldots,m$ является решением задачи Коши для уравнения Лапласа (в смысле второго параграфа главы 1), удовлетворяющим начальным условиям соответственно вида

$$p_k\Big|_{z=0} = g_k, \quad \left.\frac{\partial p_k}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad q_k\Big|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial q_k}{\partial z}\right|_{z=0} = h_k.$$

Третья глава посвящена исследованию задачи Коши для полигармонического и полиметагармонического уравнений. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [10], [13], [15].

В первом параграфе этой главы для полигармонического уравнения

$$\Delta^p u = 0, \tag{3.1}$$

где Δ - оператор Лапласа

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \quad ,$$

$$\Delta^p \equiv \Delta\left(\Delta^{p-1}\right), \quad p \in \mathrm{N}, \quad p \geq 2$$

в пространстве $\mathrm{C}^{\mathrm{n}+1}$ комплексных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ рассматривается следующая задача Коши: найти голоморфное решение u уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial z^j}\right|_{z=0} = f_j(X), \quad j = 0,1,\ldots,2p-1, \tag{3.2}$$

где, как и выше, приняты обозначения $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), z = x_{n+1}$, а $f_j(X)$ – функции, голоморфные в некоторой области голоморфности $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}^{\mathrm{n}}$.

Используя общепринятую методику [8], нами сначала исследуется «стандартная» задача Коши, а именно

$$f_j(X) \equiv 0, \; j = 0,1,\ldots,2p-2, \quad f_{2p-1}(X) = f(X), \tag{3.3}$$

для решения которой получено представление в виде ряда по степеням переменной z (лемма 3.1) и описана область абсолютной и равномерной сходимости этого ряда (лемма 3.2).

Опираясь на эти леммы, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Если функция $f(X)$ голоморфна в круговом полицилиндре $\mathrm{D}: \left\{\left|x_1\right| < r_1, \ldots, \left|x_n\right| < r_n\right\}$ и непрерывна в замкнутой области $\overline{\mathrm{D}}$, то для решения задачи Коши (3.1), (3.3) справедливо следующее интегральное представление

$$u(X, z) = \frac{1}{(2\pi i)^n \Gamma(2p)} \int_\Gamma \frac{z^{2p-1} f\left(t_1, \ldots, t_n\right)}{\left(t_1 - x_1\right)\ldots\left(t_n - x_n\right)} \times$$

$$\times F_B^{(n)}\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},1,\ldots,1;\,p+\frac{1}{2};-\frac{z^2}{(t_1-x_1)^2},\ldots,-\frac{z^2}{(t_n-x_n)^2}\right)dt_1\ldots dt_n, \quad (3.6)$$

где $F_B^{(n)}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n)$ – гипергеометрическая функция Лауричелла, а интегрирование ведётся по остову Γ границы полицилиндра D.

Далее, для рассматриваемой в главе 3 общей задачи Коши (3.1), (3.2) выводится следующее представление.

ТЕОРЕМА 3.2. Если функции $f_j(X)$, $j=0,1,\ldots,2p-1,$ голоморфны в круговом полицилиндре D: $\{|x_1|<r_1,\ldots,|x_n|<r_n\}$, то для решения задачи Коши (3.1), (3.2) справедливо следующее представление

$$u(X,z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\sum_{k=1}^{p}C_{p-1}^{k-1}\{G_k(t_1-x_1,\ldots,t_n-x_n,z)f_{2k-2}(t_1,\ldots,t_n)+$$

$$+H_k(t_1-x_1,\ldots,t_n-x_n,z)f_{2k-1}(t_1,\ldots,t_n)\}dt_1\ldots dt_n, \quad (3.14)$$

в котором

$$G_k=\frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+k-p}\frac{(m+k-p)_{p-k}(m+1)_{k-1}}{\Gamma(2m+2k-1)}\times$$

$$\times z^{2m+2k-2}\Delta^m\left(\frac{1}{(t_1-x_1)\ldots(t_n-x_n)}\right), \quad (3.15)$$

$$H_k=\frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+k-p}\frac{(m+k-p)_{p-k}(m+1)_{k-1}}{\Gamma(2m+2k)}\times$$

$$\times z^{2m+2k-1}\Delta^m\left(\frac{1}{(t_1-x_1)\ldots(t_n-x_n)}\right), \quad (3.16)$$

а интегрирование ведётся по остову Γ границы полицилиндра D.

При обосновании этой теоремы получены два вспомогательных технических результата (леммы 3.3, 3.4), связанные с преобразованием конечных сумм и представляющие, на наш взгляд, некий самостоятельный интерес.

Используя теперь представление (3.14), нами в заключительной части первого параграфа главы 3 сформулировано следующее основное утверждение для полигармонического уравнения.

ТЕОРЕМА 3.3. Каковы бы ни были функции $f_j(X)$, голоморфные в полицилиндре $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}^{\mathrm{n}}$ и непрерывные в замкнутом полицилиндре $\overline{\mathrm{D}}$, в пространстве $\mathrm{C}^{\mathrm{n+1}}$ найдётся содержащая D область голоморфности $\mathrm{H(D)}$ такая, что решение $u(X, z)$ задачи Коши (3.1), (3.2) голоморфно в $\mathrm{H(D)}$.

Если, кроме того, начальные данные $f_j(X)$ аналитически продолжимы из области D, то решение задачи Коши $u(X, z)$ аналитически продолжимо из области $\mathrm{H(D)}$.

При этом, для каждой точки X границы области $\mathrm{H(D)}$ существует решение уравнения (3.1), голоморфное в $\mathrm{H(D)}$, удовлетворяющее начальным данным, голоморфным в D, и имеющее особенность в точке X.

Второй параграф главы 3 посвящён полиметагармоническому уравнению

$$(\Delta + \lambda)^p v = 0,\ p \in \mathrm{N},\ p \geq 2,\ \lambda = const \tag{3.23}$$

в пространстве $\mathrm{C}^{\mathrm{n+1}}$ комплексных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

Решения этого уравнения представлены через полигармонические функции, что и отражает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.4. Если функция $u(X, z)$ является решением уравнения (3.1), удовлетворяющим начальным условиям (3.3), то решение $v(X, z)$ уравнения (3.23), удовлетворяющее тем же начальным условиям, описывается формулой

$$v(X,z)=u(X,z)-\frac{z\sqrt{\lambda}}{2}\int_0^1 \frac{J_1\left(z\sqrt{\lambda s}\right)}{\sqrt{s}}u\left(X,z\sqrt{1-s}\right)ds, \qquad (3.25)$$

где $J_1\left(z\sqrt{\lambda s}\right)$ – функция Бесселя [5].

В заключение автор считает своим непременным долгом почтить светлую память своего первого научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора А.И.Янушаускаса (1932-1999), с которым была связана моя многолетняя научная жизнь как в вопросах постановки ряда задач, так и в выборе методов их решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Янушаускас А.И. Задача Коши для уравнения Лапласа и операция умножения для гармонических функций. – ДАН СССР, 159, № 2 (1964), с. 286 – 289.

[2]. Янушаускас А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1979. 190 с.

[3]. Янушаускас А.И. К задаче Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными. – Сиб. матем. журн., 1975, т.16, № 6, с. 1352 – 1363.

[4]. Янушаускас А.И. О задаче Коши для одного класса эллиптических и вырождающихся уравнений. – Сиб. матем. журн., 1967, т.8, № 4, с. 913 – 925.

[5]. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. – М.: ИЛ, 1963. 468 с.

[6]. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. 800 с.

[7]. Векуа И.Н. О метагармонических функциях. – Труды Тбилисского матем. ин-та, XII, 1943, с. 105 – 174.

[8]. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. 351 с.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[9]. Шалагинов С.Д. Задача Коши для уравнения Лапласа в комплексном пространстве. – Дифференц. уравнения, 1980, т.16, № 5, с. 947 – 949.

[10].Шалагинов С.Д. Задача Коши для полигармонического уравнения. – Тезисы областной межвузовской конференции молодых учёных и специалистов. Тюмень, 1985, с. 57.

[11].Шалагинов С.Д. Интегральные представления решений одного эллиптического уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. – Деп. в ВИНИТИ, 1990, № 3651-В90, 9 с.

[12].Шалагинов С.Д. Интегральное представление решений уравнения Пуассона. В кн.: Краевые задачи. Иркутск: Иркут. ун-т, 1990, с. 69 – 72.

[13].Шалагинов С.Д. Интегральные представления полигармонических функций. В кн.: Математический сборник. Ишим: Изд-во ИГПИ им. П.П. Ершова, 2000, с. 95 – 97.

[14]. Шалагинов С.Д. Задача Коши для уравнения Лапласа в многомерном комплексном пространстве. – Успехи современного естествознания, 2003, № 2.

[15]. Шалагинов С.Д. Интегральные представления решений полигармонического уравнения в комплексном пространстве. – Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1557-В2002, 12 с.